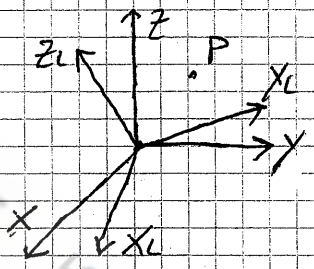
BIOMECHANICS OF HUMAN MOTION

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

LA MATRICE DI ROTAZIONE

Tale materia studia il movimento delle macchine naturali, con particolare riferimento a quelle umane. Considerando due arti in movimento, quasi sempre l'uno compie un moto puramente rotatorio rispetto all'altro. Si considera quindi un sistema di riferimento XYZ, solidale al corpo assunto fermo, detto sistema di riferimento globale. Successivamente, si considera uno $X_i Y_i Z_i$, solidale all'arto che ruota, detto locale. Essendo il moto relativo puramente rotatorio, entrambi i sistemi hanno medesima origine.



È nostro interesse, date le coordinate di un punto nel sistema di riferimento locale, esprimerle in quello globale. La coordinata X è espressa come

$$X = X_L\, \bar{i}\cdot\bar{X}\bar{i} + Y_L\, \bar{j}\cdot\bar{X}\bar{i} + Z_L\, \bar{k}\cdot\bar{X}\bar{i}$$

dove, ad esempio, $\bar{i}\cdot\bar{X}\bar{i}$ è la proiezione dell'i-esimo versore del locale sull'i-esimo versore del globale. La terna di coordinate globali è, quindi, esprimibile in funzione di quelle locali tramite la matrice di rotazione, matrice tale che

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i}\cdot\bar{X}\bar{i} & \bar{j}\cdot\bar{X}\bar{i} & \bar{k}\cdot\bar{X}\bar{i} \\ \bar{i}\cdot\bar{Y}\bar{j} & \bar{j}\cdot\bar{Y}\bar{j} & \bar{k}\cdot\bar{Y}\bar{j} \\ \bar{i}\cdot\bar{Z}\bar{k} & \bar{j}\cdot\bar{Z}\bar{k} & \bar{k}\cdot\bar{Z}\bar{k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{vmatrix} \quad \text{o} \quad |P| = R_{L\to G}\,|P_L|$$

La matrice di rotazione ha un duplice significato. Oltre a permetterci di esprimere coordinate locali in globali, ci consente anche di descrivere l'orientamento di un sistema di riferimento rispetto all'altro. Tali matrici sono tutte ortonormali.

ROTAZIONI ELEMENTARI

In biomeccanica sono importanti le rotazioni che ci consentono di ottenere il sistema di riferimento locale,


master
COPY
COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

partendo dal globale, tramite una rotazione di quest'ultimo rispetto ad uno dei suoi assi. Tali rotazioni elementari sono 3 ed hanno matrice di rotazione rispettivamente

$$R_x(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \quad \text{asse X angolo } \alpha$$

$$R_y(\beta) = \begin{vmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{vmatrix} \quad \text{asse Y angolo } \beta$$

$$R_z(\gamma) = \begin{vmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{asse Z angolo } \gamma$$

COMBINAZIONI DI ROTAZIONI

Nelle rotazioni tra assi, più o meno complesse, supponiamo l'ipotesi di incorrelazione di movimento tra i vari assi, sebbene sia forzata. Come possono essere espressi i movimenti più o meno complessi tra due assi? Poiché le rotazioni più facilmente utilizzabili sono quelle elementari, è possibile esprimere le rotazioni come loro combinazioni lineari. Ciò è possibile tramite i metodi degli assi locali e globali

Nel metodo degli assi locali, partendo dal sistema di riferimento globale, si applica una nuova rotazione elementare sempre all'ultimo sistema ~~di riferimento locale~~ trasformato ottenuto. Immaginando di compiere tutte e tre le rotazioni elementari, otteniamo che

$|P|_2 = R_{3\to2}|P|_3$

$|P|_1 = R_{2\to1}|P|_2 = R_{2\to1}R_{3\to2}|P|_3$

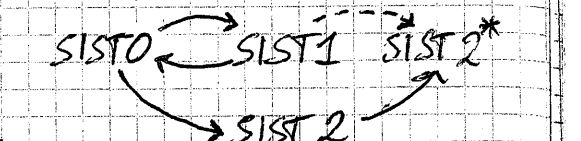
$|P|_0 = R_{1\to0}|P|_1 = R_{1\to0}R_{2\to1}R_{3\to2}|P|_3$

quindi

$R_{3\to0} = R_{1\to0}R_{2\to1}R_{3\to2}$

Nel metodo ad assi globali, invece, le rotazioni elementari vengono sempre applicate al sistema globale.

Di conseguenza, applicata la prima rotazione, non è possibile applicare la seconda a quello ruotato, poiché non è più quella globale. Come si risolve questo problema?



Applichiamo al sistema ruotato una rotazione opposta alla precedente, facilmente deducibile, poiché le matrici di rotazione sono ortonormali. In questo modo otteniamo un nuovo spazio ruotato, coincidente, ma non uguale a quello globale. È, quindi, ora possibile applicare la seconda rotazione elementare, ottenendo un altro nuovo sistema ruotato. Applicando una rotazione opposta a quella artificiale eseguita, otteniamo un sistema coincidente a quello che avremmo ottenuto, se avessimo eseguito la seconda rotazione sul primo nuovo spazio ruotato.
Nella pratica la matrice di rotazione complessiva applicata al globale è la seguente

$R_{TOT} = R1 \to 0\ R0 \to 1\ R2 \to 0\ R1 \to 0 = R2 \to 0\ R1 \to 0$

poiché $R1 \to 0$ e $R0 \to 1$ sono una l'inverso dell'altra
È importante stare attenti all'ordine con cui si eseguono le operazioni, poiché i prodotti tra matrici non godono della proprietà commutativa

APPLICAZIONI ALLA BIOMECCANICA

Nel moto relativo tra gli arti, il sistema di assi globale è fissato nel seguente modo. Scelto l'arto fisso. L'asse X è rivolto nel verso del movimento, l'asse Y è lungo longitudinale dal giunto distale al giunto prossimale, mentre l'asse Z si determina con la regola della mano destra da X a Y.
Un movimento attorno all'asse Z è detto flessoestensione, attorno all'asse X abduzione o adduzione, attorno all'asse Y rotazione interna.
Tramite dei reperi anatomici, punti precisi degli arti,

è possibile determinare i piani che devono contenere gli assi di riferimento. Occorrono, quindi, almeno tre marker non allineati per ogni segmento articolare. Inoltre, devono essere visibili, poiché su essi vengono poi montati i sensori di movimento. Tale loro applicazione deve essere il più indipendente possibile dal soggetto in analisi. Di solito, solo l'ultima caratteristica è facilmente ottenibile.
In biomeccanica gli strumenti di misura ci forniscono la matrice di rotazione completa e tramite esso si ricavano gli angoli di rotazione. La matrice ~~com~~ complessiva è definita come

$$R_{DIST \to PROX} = R_z(\gamma) R_{x'}(\alpha) R_{y''}(\beta)$$

applicando il metodo degli assi locali. Da questa si ricava che

$$\alpha = \text{sen}^{-1}[R_j(3,2)]$$
$$\beta = \text{sen}^{-1}[-R_j(3,1) / \cos\alpha]$$
$$\gamma = \text{sen}^{-1}[-R_j(1,2) / \cos\alpha]$$

Tali angoli vengono detti di Cardano.

TRASLAZIONI E ROTOTRASLAZIONI

Se il moto relativo tra due segmenti è una traslazione, le coordinate globali si legano alle locali tramite la relazione

$$\begin{vmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{vmatrix}_G = \begin{vmatrix} X_{O_L} \\ Y_{O_L} \\ Z_{O_L} \end{vmatrix}_G + \begin{vmatrix} X_{P_L} \\ Y_{P_L} \\ Z_{P_L} \end{vmatrix}_L$$

In moti relativi rototraslatori, invece,

$$\begin{vmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{vmatrix}_G = \begin{vmatrix} X_{O_L} \\ Y_{O_L} \\ Z_{O_L} \end{vmatrix}_G + R \begin{vmatrix} X_{P_L} \\ Y_{P_L} \\ Z_{P_L} \end{vmatrix}_L$$

La ~~rotazione~~ traslazione pura è, infatti, il caso specifico in cui $R = I$.